

# Optimisation de lissage dans la prédiction des performances d'un système de communication numérique

Mohamed ET-TOLBA

Institut National des Postes et Télécommunications

April 21, 2015

# Equipe de recherche

- **PACOMS** (*Performance Analysis of Communication Systems*)
  - **Laboratoire de recherche** : STRS  
*Systemes de Télécommunications, Réseaux et Services*
  - **Effectif** : **5** enseignants chercheurs et **8** doctorants
  - **Axes de recherche** :
    - Techniques avancées pour les communications radio
    - Prédiction semi-analytique des performances
    - Traitement du signal et ses applications
    - Ingénierie de trafic et dimensionnement des réseaux

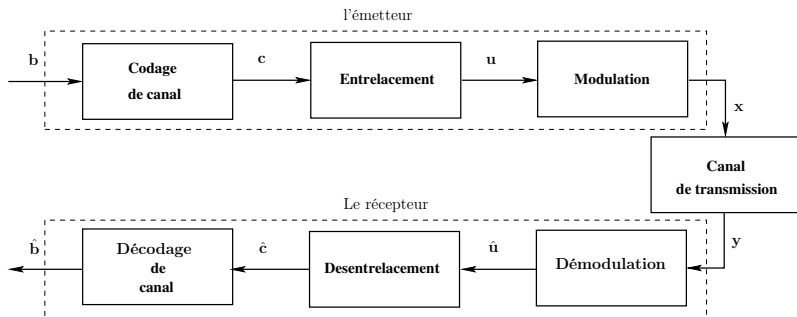
- Introduction
- Prédiction semi-analytique de performances
  - Prédiction semi-analytique basée sur les tables de qualité
  - Prédiction semi-analytique basée sur les noyaux
- Optimisation du paramètre de lissage
- Résultats
- Conclusion et perspectives

# Problématique

- Les systèmes de communication radio mobiles actuels ont été conçus pour offrir des services à haut débit
- Des nouvelles technologies ont été introduites au niveau de la couche physique :
  - Modulation et codage adaptatifs
  - Technique de retransmission HARQ
  - Diversité spatio-temporelle, ... etc

# La chaîne de communication

- Structure :



## Problème :

Lorsque l'ordre de la modulation est important  $\Rightarrow$  l'évaluation des performances par la méthode de simulation Monte-Carlo devient coûteux en termes de temps de calcul

# Solutions

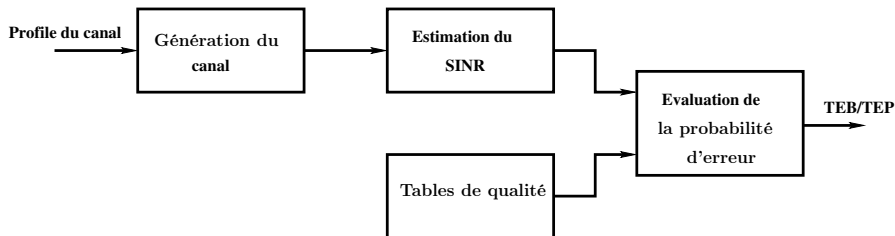
## Solutions proposées :

Méthodes simplifiées pour la prédiction des performances d'un système de communication numérique

- Deux approches de prédiction semi-analytique
  - Prédiction semi-analytique basée sur les tables de qualité
  - Prédiction semi-analytique basée sur la méthode des noyaux
- La prédiction semi-analytique des performances constitue l'axe principale de mes activités de recherche

# Le simulateur simplifié à base des tables de qualité

- Structure du simulateur simplifié :



- SINR : Rapport signal à interférences plus bruit
- TEB : Taux d'Erreur par Bit
- TEP : Taux d'Erreur par Paquet

# Le simulateur simplifié

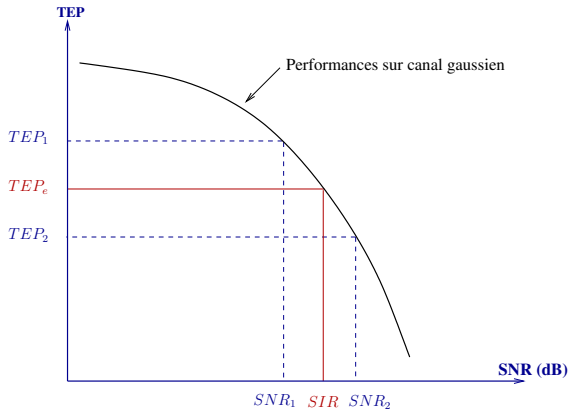
## Traitements

- Le canal radio-mobile est constant sur un bloc de données
- Les tables de qualité sont construites avec la méthode de Monte-Carlo
- *SIR* tient compte des interférences et le bruit
- Le calcul du *SIR* dépend du récepteur utilisé
- La probabilité d'erreur est calculée par une interpolation linéaire



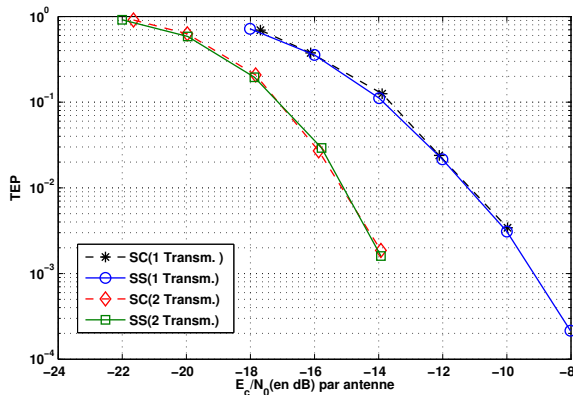
# Estimation de la probabilité d'erreur

- Interpolation linéaire



# Validation du simulateur simplifié

- Canal : ITU-VA
- QPSK
- Récepteur : Rake
- Débit = 69 Kbits/s
- vitesse = 3 km/h
- HARQ : 2 Transm.



# Prédiction semi-analytique des performances

## Modulation d'ordre supérieur

- Les modulations d'ordre supérieur sont parmi les techniques utilisées dans les systèmes radio mobiles modernes pour augmenter le débit
- La conversion symbole à bits dans ce type de modulation peut augmenter la complexité au niveau du récepteur  
⇒ Une modulation *QAM* est vue comme une combinaison de deux modulations *PAM* indépendantes
- L'évaluation des performances avec la méthode de Monte-Carlo est difficile lorsque la taille de la constellation est élevée

### Solution

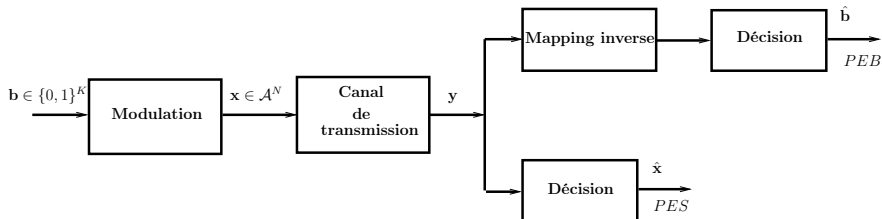
**Utilisation des méthodes semi-analytique pour prédire les performances d'une modulation *PAM***

# Objectif et structure du simulateur simplifié

## Objectif :

Trouver une expression semi-analytique pour la probabilité d'erreur

- Structure du simulateur



# Probabilité d'erreur par symbole

## Définition

- Considérons deux variables aléatoires :
  - la variable aléatoire  $X$  associée aux symboles transmis
  - la variable aléatoire  $Y$  associée aux symboles observés par le récepteur
- Supposons que le symbole  $x_m, m = 1, \dots, M$  est transmis

## La probabilité d'erreur par symbole

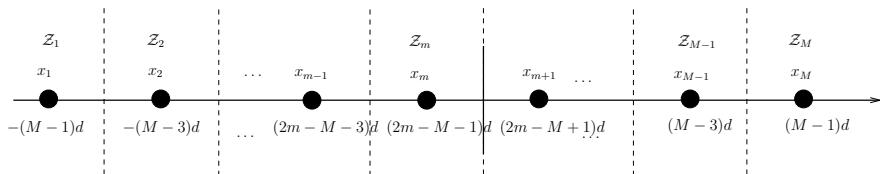
La probabilité d'erreur par symbole est la probabilité de prendre une décision erronée sachant que le symbole  $x_m$  est transmis.

## Formule :

$$Pr(\text{Erreur} \mid X = x_m \text{ transmis}) = Pr(Y \neq x_m \mid X = x_m) \quad (1)$$

# Zones de décision dans une constellation M-PAM

- La constellation est divisée en  $M$  zones de décision :



- Définition des zones de décision :

- Premier cas : Zones extrêmes

$$Z_1 = \{z \in \mathbb{R} : z \leq -(M-2)d\} \quad (2)$$

$$Z_M = \{z \in \mathbb{R} : (M-2)d < z\} \quad (3)$$

- Deuxième cas : Zones non extrêmes ( $m = 2, \dots, M-1$ )

$$Z_m = \{z \in \mathbb{R} : (2m-M-2)d < z \leq (2m-M)d\} \quad (4)$$

# Probabilité d'erreur par symbole

## Réexpression

- En considérant les zones de décision et la densité de probabilité, la probabilité d'erreur se réécrit :

$$\begin{aligned} Pr(\text{Erreur} \setminus X = x_m \text{ transmis}) &= Pr(Y \notin \mathcal{Z}_m \setminus X = x_m) \\ &= \int_{y \notin \mathcal{Z}_m} f_Y(y \setminus x_m) dy \quad (5) \end{aligned}$$

- $\mathcal{Z}_m$  est la zone de décision associée au symbole  $x_m$
- $f_Y(y)$  est la densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y$



L'évaluation de la probabilité d'erreur repose sur l'estimation de la densité de probabilité  $f_Y(y)$  de la variable aléatoire  $Y$  en sortie du canal de transmission

# Estimation de la densité de probabilité

## La méthode des noyaux

- Le récepteur effectue l'estimation de la densité de probabilité à base des échantillons observés à son entrée
- Aucune information sur la forme de la densité de probabilité n'est disponible au niveau du récepteur
- Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble de  $N$  échantillons observés par le récepteur
- L'ensemble  $\mathcal{S}$  est divisé en  $M$  sous-ensembles  $\mathcal{S}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$
- Un sous-ensemble  $\mathcal{S}_m$  contient  $N_m$  réalisations  $y_{m,i}$ ,  $i = 1, \dots, N_m$



# Estimation de la densité de probabilité

## Formule de l'estimateur à noyau

- L'estimateur à noyau

$$\tilde{f}_Y(y \mid x_m) = \frac{1}{N_m h_m} \sum_{i=1}^{N_m} \mathcal{K}\left(\frac{y - y_{m,i}}{h_m}\right) \quad (6)$$

- $h_m$  est le paramètre de lissage et  $\mathcal{K}(\cdot)$  désigne le noyau
- Toute fonction qui vérifie les propriétés d'une densité peut être utilisée comme un noyau
- Le noyau gaussien est le plus utilisé grâce à sa simplicité dans les calculs

La qualité de l'estimateur de la densité de probabilité dépend fortement du choix du paramètre de lissage  $h_m$

# Estimation de la densité de probabilité

## Paramètre de lissage

- Minimisation de l'erreur quadratique moyenne intégrée

$$EQMI(f, \tilde{f}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} \left( (f_Y(y) - \tilde{f}_Y(y))^2 \right) dy \quad (7)$$

- Une expression asymptotique de l'EQMI

$$EQMIA(f, \tilde{f}) = \frac{R(\mathcal{K})}{N_m h_m} + \frac{h_m^4}{4} \mu_2^2(\mathcal{K}) R(f'') \quad (8)$$

où  $R(\mathcal{K}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}^2(u) du$  et  $\mu_2(\mathcal{K}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathcal{K}(u) du$ .

# Optimisation de lissage

- Choix du paramètre de lissage

$$\begin{aligned}
 h_{m,opt} &= \underset{h_m}{\operatorname{argmin}}(EQMIA(f, \tilde{f})) \\
 &= \left( \frac{R(\mathcal{K})}{\mu_2^2(\mathcal{K})R(f'')} \right)^{1/5} N_m^{-1/5} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Le paramètre de lissage dépend d'une quantité inconnue  $R(f'')$

- Méthodes de minimisation
  - Méthode de Rule-of-Thumb (RoT)
  - Méthode de la validation croisée (VC)

# Optimisation de lissage

## Méthode de Rule-of-Thumb

### L'idée

Minimiser l'EQMI en remplaçant la fonction  $f$  par une densité normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$

- Pour un kernel gaussien, le paramètre de lissage optimal s'écrit

$$\begin{aligned}
 h_{m, RoT} &= \left[ \frac{(2\sqrt{\pi})^{-1}}{\frac{3}{8}\pi^{-1/2}\hat{\sigma}_m^{-5}} \right]^{1/5} N_m^{-1/5} \\
 &= 1.06\hat{\sigma}_m N_m^{-1/5}
 \end{aligned} \tag{10}$$

# Optimisation de lissage

## Méthode de validation croisée

### L'idée

Estimation de la quantité inconnue  $R(f'')$  par la validation croisée

- L'estimateur de la quantité  $R(f'')$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(f'') &= R(\tilde{f}'') - (N_m h_m^5)^{-1} R(\mathcal{K}'') \\ &= N_m^{-2} \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{i \neq j}^{N_m} (\mathcal{K}_{h_m}'' * \mathcal{K}_{h_m}'')(Y_i - Y_j)\end{aligned}\quad (11)$$

- Nouvelle expression de l'EQMI

$$EQMI_{VC}(h_m) = \frac{R(\mathcal{K})}{N_m h_m} + \frac{h_m^4}{4} \mu_2^2(\mathcal{K}) \widetilde{R}(f'') \quad (12)$$

# Méthode de validation croisée

## Paramètre de lissage

- Paramètre optimal de lissage

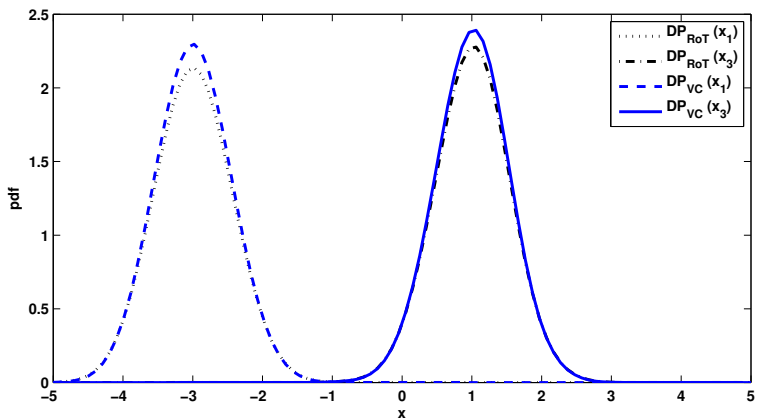
$$\begin{aligned}
 h_{m,VC} &= \underset{h_m}{\operatorname{argmin}}(EQMIA(f, \tilde{f})) \\
 &= \left( \frac{R(\mathcal{K})}{\mu_2^2(\mathcal{K}) \overline{R(f'')}} \right)^{1/5} N_m^{-1/5} \quad (13)
 \end{aligned}$$

# Densité de probabilités

## Résultats

● Modulation : 4-PAM

● 4000 échantillons



# Probabilité d'erreur semi-analytique

## Probabilité d'erreur par symbole

- Cas des symboles des zones extrêmes

$$Pr(Error \setminus x_1) = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} Q\left(\frac{-((M-2)d + y_{i,1})}{h_1}\right) \quad (14)$$

$$Pr(Error \setminus x_M) = \frac{1}{N_M} \sum_{i=1}^{N_M} Q\left(\frac{-((M-2)d - y_{i,M})}{h_M}\right) \quad (15)$$

- Cas des symboles des zones non extrêmes

$$Pr(Error \setminus x_m) = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \left( Q\left(\frac{-((2m-M-2)d - y_{i,m})}{h_m}\right) + Q\left(\frac{((2m-M)d - y_{i,m})}{h_m}\right) \right) \quad (16)$$

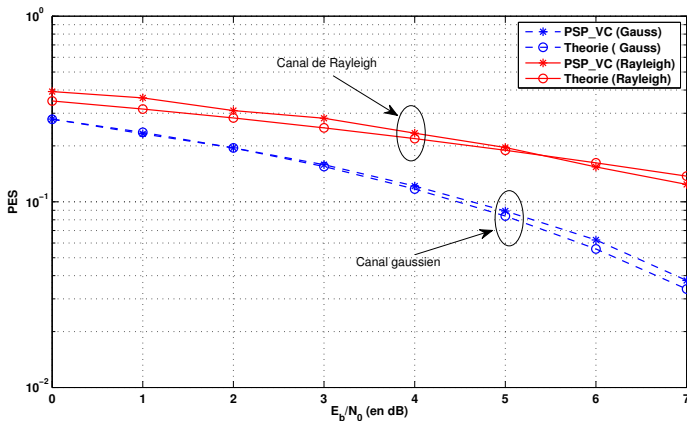


# Probabilité d'erreur par symbole

## Résultats

● Modulation : 4-PAM

● 4000 symboles

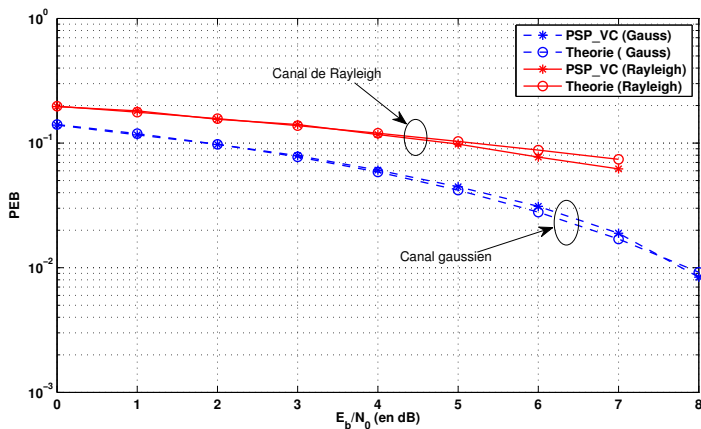


# Probabilité d'erreur par bit

## Résultats

● Modulation : 4-PAM

● 4000 symboles



# Conclusions et perspectives

## Conclusions

- Evaluation des performances d'un système de communication numérique
- Optimisation du temps de calcul
  - Simulation simplifiée basée sur les tables de qualité
  - Prédiction semi-analytique des performances
- Optimisation du paramètre de lissage
- Validation par des simulations

# Conclusions et perspectives

## Perspectives

- Proposer d'autres méthodes d'optimisation
- Etendre l'étude vers d'autres systèmes de communication
- Etudier des cas de transmission réalistes

**QUESTIONS?**